第 21 講　数列(2)

1　2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

①　$a_1=2$，$a_2=42$　　②　$b_n=a_{n+1}-a_n$ で，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-4$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

を満たすとき，つぎの問に答えよ．

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

【Point Pickup】

特性方程式型漸化式

$a_{n+1}=pa_n+q$ の形をした漸化式は，特性方程式「$\alpha=p\alpha+q$」を用意して差をとると「　　　　　型」の漸化式になる．「　　　」のずれに注意．

階差型漸化式

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ の形をした漸化式は，$f(n)$ が a_n の「　　　　　」である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　一般項が $a_k=2k-1$ の数列に，次のような規則で縦棒による区切りを入れて区分けする．その規則とは，区分けされた n 番目の部分（これを第 n 群と呼ぶことにする）が $2n-1$ 個の項からなるように区切るものである．

$1\,|\,3,\ 5,\ 7\,|\,9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\,|\,19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31\,|\,33,\ 35,\ 37,\ \cdots\cdots$

このとき，例えば第 3 群は 9，11，13，15，17 の 5 つの項からなるので，第 3 群の初項は 9，末項は 17，中央の項は 3 番目の 13 である．また，第 3 群の総和は $9+11+13+15+17=65$ であり，15 は第 3 群の第 4 項である．

(1)　第 n 群の末項を n の式で表せ．

(2)　第 n 群の初項，中央の項を n の式で表せ．

(3)　第 n 群の項の総和 $S(n)$ を n の式で表せ．

(4)　2013 は第何群の第何項か．

【Point Pickup】

群数列

第 n 群に含まれる「　　　」がカギ．

その「　　」を求めることで，第 n 群の末項，初項がもとの数列の何番目の項かがわかる．

群に属すると仮定

ある数字が第何群の何番目の項かを調べたいときは，もとの数列の何番目かを調べる．

その上で，その数字が第 n 群に属すると仮定すると，「　　」で挟み込むことができる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　$n \geqq 2$ であるような自然数 n に対して

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2+3+\cdots\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ.

[2]　次の式で定められる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ.

$$a_1=5\quad,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して　$a_n>4$ が成り立つことを示せ.

(2)　すべての自然数 n に対して　$a_{n+1}<a_n$ が成り立つことを示せ.

【Point Pickup】

[1]　証明したい式を変形

等式や不等式の証明において，同値性を崩さずに計算・変形できる部分があればそれを行った後の式を証明すべき式としてもよい.

個数に注意

数列の和が，項を列挙する形で表されているときは，特にその「　　　」に注意.

[2]　数学的帰納法による不等式の証明

成り立つと仮定した式が不等式ならば，それを示したい式に用いる際に「　　　　　」が発生する.

また不等式の証明 A＞B の証明は「　　　　　」を計算して「　　」であることを示すのが基本.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　数列(2)

［1］　$b_1=2$，$b_{n+1}-b_n=a_n$（$n=1$，2，3，……）で表される数列 $\{b_n\}$ がある．また数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$（$n=1$，2，3，……）で定められている．このとき，

$a_n=$ ア・イ $^{n-1}-$ ウ であり，$b_n=$ エ $^{n-1}-n+$ オ である．

［2］　自然数1，2，3，……を，第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように群に分ける．

1｜2，3，4｜5，6，7，8，9｜10，11，12，13，14，15，16｜17，18，19，……

(1)　第 n 群の最初の項は　n^2- カ $n+$ キ である．

(2)　第 n 群に含まれる数の和は　(ク $n-1$)(n^2-n+ ケ) である．

(3)　365は第 コサ 群の シ 番目の項である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　数列(2)

1　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

①　$a_1=2,\ a_2=42$　　②　$b_n=a_{n+1}-a_n$ で，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n-4$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

を満たすとき，つぎの問に答えよ．

(1)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$b_1=a_2-a_1=40$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-4 \text{ より}\quad b_{n+1}+8=\frac{1}{2}(b_n+8)$$

よって数列 $\{b_n+8\}$ は，初項 $b_1+8=48$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である．

$$b_n+8=48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b_n=48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-8}$$

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ より，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列である．

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-8\right\}$$

$$=2+\frac{48\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-8(n-1)=106-8n-96\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad (n=1 \text{ のときも成立})$$

よって　$\boldsymbol{a_n=106-8n-96\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　一般項が $a_k=2k-1$ の数列に，次のような規則で縦棒による区切りを入れて区分けする．その規則とは，区分けされた n 番目の部分（これを第 n 群と呼ぶことにする）が $2n-1$ 個の項からなるように区切るものである．

1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，21，23，25，27，29，31 | 33，35，37，……

このとき，例えば第 3 群は 9，11，13，15，17 の 5 つの項からなるので，第 3 群の初項は 9，末項は 17，中央の項は 3 番目の 13 である．また，第 3 群の総和は $9+11+13+15+17=65$ であり，15 は第 3 群の第 4 項である．

(1)　第 n 群の末項を n の式で表せ．

(2)　第 n 群の初項，中央の項を n の式で表せ．

(3)　第 n 群の項の総和 $S(n)$ を n の式で表せ．

(4)　2013 は第何群の第何項か．

(1)　第 k 群には $2k-1$ 個の項がある．

第 n 群の末項は，はじめから数えて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$（番目）の項である．

よって第 n 群の末項は　$a_{n^2}=\mathbf{2n^2-1}$

(2)　第 n 群（$n\geqq2$）の初項は，はじめから数えて $(n-1)^2+1=n^2-2n+2$（番目）の項である（これは $n=1$ のときも成り立つ）．

よって第 n 群の初項は　$a_{(n^2-2n+2)}=2(n^2-2n+2)-1=\mathbf{2n^2-4n+3}$

また第 n 群の中央の項は，はじめから数えて $(n-1)^2+n=n^2-n+1$（番目）の項である（これは $n=1$ のときも成り立つ）．

よって第 n 群の中央の項は　$a_{(n^2-n+1)}=2(n^2-n+1)-1=\mathbf{2n^2-2n+1}$

(3)　第 n 群は初項 $2n^2-4n+3$　末項 $2n^2-1$　項数 $2n-1$ の等差数列より，その総和は

$$S(n)=\frac{(2n-1)\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}}{2}=\mathbf{4n^3-6n^2+4n-1}$$

(4)　$2k-1=2013$ より　$k=1007$　　よって 2013 は，はじめから数えて 1007 番目の項．

これが第 n 群に属するとすると，$(n-1)^2<1007\leqq n^2$

$31^2=961$，$32^2=1024$ より，これを満たす自然数 n は $n=32$

第 31 群の末項までの項数は $31^2=961$　　したがって 2013 は**第 32 群の第 46 項**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ $n\geqq 2$ であるような自然数 n に対して

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot (n+1)=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2+3+\cdots\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ.

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2+3+\cdots\cdots+n)=\left\{\frac{n(1+n)}{2}\right\}\left\{\frac{(n-1)(2+n)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$$

よって，$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot (n+1)=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$ ……① が

$n\geqq 2$ のすべての自然数 n で成立することを証明する.

$n=2$ のとき　①の左辺$=1\cdot 2\cdot 3=6$　　①の右辺$=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=6$　より成立.

$n=k(\geqq 2)$ のとき　①が成り立つと仮定する.

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots\cdots+(k-1)\cdot k\cdot (k+1)=\frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)$$

このとき

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots\cdots+(k-1)\cdot k\cdot (k+1)+k(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{4}(k-1)k(k+1)(k+2)+k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)\{(k-1)+4\}$$
$$=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

より，①は $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より①は2以上のすべての自然数 n で成り立つ．よって示された.

3 ［2］ 次の式で定められる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ.

$$a_1=5\ ,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して　$a_n>4$ が成り立つことを示せ.

(2) すべての自然数 n に対して　$a_{n+1}<a_n$ が成り立つことを示せ.

(1) $a_n>4$ ……① について　　$n=1$ のとき $a_1=5$ より①は成り立つ.

$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると　$a_k>4$

このとき　$a_{k+1}-4=\frac{a_k}{2}+\frac{8}{a_k}-4=\frac{{a_k}^2-8a_k+16}{2a_k}=\frac{(a_k-4)^2}{2a_k}>\frac{(4-4)^2}{2a_k}=0$

よって　$a_{k+1}>4$　より①は　$n=k+1$ のときも成り立つ.

したがってすべての自然数 n で①が成り立つ.

(2) (1)を用いると　$a_n>4$ より

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\right)=\frac{a_n}{2}-\frac{8}{a_n}=\frac{{a_n}^2-16}{2a_n}>\frac{4^2-16}{2a_n}=0$$

よって　$a_{n+1}<a_n$ が示された.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　数列(2)

［1］　$b_1=2$，$b_{n+1}-b_n=a_n$（$n=1$，2，3，……）で表される数列 $\{b_n\}$ がある．また数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$（$n=1$，2，3，……）で定められている．このとき，

$a_n=$ ア・イ $^{n-1}-$ ウ であり，$b_n=$ エ $^{n-1}-n+$ オ である．

［2］　自然数 1，2，3，…… を，第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように群に分ける．

1 | 2，3，4 | 5，6，7，8，9 | 10，11，12，13，14，15，16 | 17，18，19，……

(1)　第 n 群の最初の項は　n^2- カ $n+$ キ である．

(2)　第 n 群に含まれる数の和は　(ク $n-1)(n^2-n+$ ケ) である．

(3)　365 は第 コサ 群の シ 番目の項である．

解答例

［1］　$a_{n+1}=3a_n+2$　より　$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，$a_1+1=1+1=2$

よって数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列である．

したがって　$a_n+1=2\cdot3^{n-1}$　より　$a_n=\mathbf{2\cdot3^{n-1}-1}$

また，$b_{n+1}-b_n=a_n$ より数列 $\{a_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列である．

$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2\cdot3^{k-1}-1)$

$$=2+\frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)=\mathbf{3^{n-1}-n+2}$$ （$n=1$ のときも成立）

［2］　(1)　もとの数列の一般項は　$a_k=k$

第 n 群の末項はもとの数列の $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$（番目）の項であるので，

第 n 群の初項はもとの数列の $(n-1)^2+1=n^2-2n+2$（番目）の項である．

よって第 n 群の初項は　$a_{n^2-2n+2}=\mathbf{n^2-2n+2}$

(2)　第 n 群の末項は　$a_{n^2}=n^2$

よって　$\dfrac{(2n-1)\{(n^2-2n+2)+n^2\}}{2}=\mathbf{(2n-1)(n^2-n+1)}$

(3)　365 はもとの数列の 365 番目．これが第 n 群に属するとすると

$(n-1)^2<365\leqq n^2$　　$19^2=361$，$20^2=400$ より　$n=20$

第 19 群の末項までの項数は　$19^2=361$　　よって 365 は　第 **20** 群の **4** 番目の項

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。